ΝΔΟ οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν και να βρεθεί το αθροισμα τους:

i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{3^{n-1}}$ και ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\cdot(n+4)}$

Λυση

i) Εχω $n=2$ και θελω να το κανω $n=1$

αν γινει αυτή η αλλαγή τότε θα πρεπει αφού θα πάει 1-πίσω ο μετρητής να παει 1-μπροστά η μεταβλητη.

Συνεπως,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^{(n+1)-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} 4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n} \quad ①$$

δηλαδή θα εχουμε μια γεωμετρική σειρά

$$① \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n} = \frac{4/3}{1-1/3} = 2$$

ii) Εστω $a_n = \frac{1}{(n+3)(n+4)}$, $n\in\mathbb{N}$

και έστω $\beta_n = \frac{1}{n^2}$, $n\in\mathbb{N}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ Είναι μια p-σειρα με $p=2$ άρα η σειρά συγκλίνει !!!

απο Οριακό κρ. σύγκρισης εχουμε

$$\lim \frac{a_n}{\beta_n} = \lim \frac{n^2}{(n+3)(n+4)} = \lim \frac{n^2}{n^2+7n+12} = \lim \frac{n^2}{n^2} = 1$$

αρα $\ell=1$ το οριο.

Ταυτοτητα, $\sum_{v=1}^{\infty} \beta_n < +\infty \Leftrightarrow \sum_{v=1}^{\infty} a_n < +\infty$, $\forall n\in\mathbb{N}$

Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:

α) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n)+\sin(3n)}{3^n}$

β) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n}{7^n}$

γ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{5n^2}$

$n \in \mathbb{N}$

ΛΥΣΗ

α) Εφαρμόζω κριτήριο Σύγκρισης διότι το μόνο που πάει στα τριγωνομετρικά

$$|a_n| = \left|\frac{\cos(2n)+\sin(3n)}{3^n}\right| = \frac{|\cos(2n)+\sin(3n)|}{3^n} \leq$$

$$\leq \frac{|\cos(2n)|+|\sin(3n)|}{3^n} \leq \frac{2}{3^n} = \beta_n, \; n\in\mathbb{N}$$

όπου $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ← Γεωμετρική σειρά (με λόγο $r=\frac{1}{3}$)

άρα η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ συγκλίνει·

συνεπώς από Κρ. σύγκρισης $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει

β) Εφαρμόζοντας το Κριτήριο λόγου D'alembert, έχουμε:

$$\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\left|\frac{(-1)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{7^{n+1}}}{(-1)^n\cdot\frac{n}{7^n}}\right| = \lim\left|\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n+1)\cdot 7^n}{7^{n+1}\cdot(-1)^n\cdot n}\right| =$$

$$= \lim\left|\frac{\cancel{(-1)^n}\cdot(-1)\cdot(n+1)\cdot\cancel{7^n}}{\cancel{7^n}\cdot 7\cdot\cancel{(-1)^n}\cdot n}\right| = \lim\left|\frac{(-1)\cdot(n+1)}{7\cdot n}\right| = \lim\left|\frac{n+1}{7n}\right| =$$

$$= \lim\left|\frac{1}{7}+\frac{1}{7n}\right| = \frac{1}{7} < 1 \rightsquigarrow \text{Άρα, } \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$$

γ) Ότι κάναμε και στο (α)

$$|a_n| = \frac{|\cos(nx)|}{5n^2} \le \frac{1}{5n^2} = \beta_n \quad , n \in \mathbb{N}$$

αλλά η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n^2} = \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ είναι σειρά

βαθμού $p=2$ άρα θα συγκλίνει.

άρα απο Κρ. συγκρισης θα συγκλίνει και

η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{5n^2}$.